

TEKRARLI PERMÜTASYON

Genel olarak sıralanmış n tane elemanın n_1 tanesi birinci türden, n_2 tanesi ikinci türden, $\dots$, n_r tanesi r . türden ve $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ ise bu n elemanın yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan farklı sıralamaların sayısı,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)! \dots (n_r)!} \text{ tanedir.}$$

Örnek

AKARSULAR kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız dokuz harfli

- Kaç farklı kelime yazılabilir?
- R ile başlayıp K ile biten kaç farklı kelime yazılabilir?



Çözüm

a) AKARSULAR kelimesindeki harfler

$\underbrace{A, A, A}_{3 \text{ tane}}, \underbrace{R, R}_{2 \text{ tane}}, \underbrace{K}_{1 \text{ tane}}, \underbrace{S}_{1 \text{ tane}}, \underbrace{U}_{1 \text{ tane}}, \underbrace{L}_{1 \text{ tane}}$

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9!}{3! \cdot 2!}$$

Toplam harf sayısı

Tekrar eden harf sayıları

kadar farklı kelime yazılabilir.

b) $\underline{R} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{K}$

Buraya geri kalan harfler sıralanır.

A, A, A, R, S, L, U

Geriye kalan 7 harf kullanılarak

$$\frac{7!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{3!} \text{ kadar farklı sözcük yazılabilir.}$$

SORU:

Özdeş 4 sarı ve özdeş 5 kırmızı boncuk düz bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 4 \\ K &\rightarrow 5 \\ 4 + 5 &= 9 \\ \frac{9!}{4!.5!} &= \frac{9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!} \\ &= 126 \end{aligned}$$

SORU:

“BERABER” kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı veya anlamsız yedi harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

$$\begin{aligned} B &\rightarrow 2 \\ E &\rightarrow 2 \\ R &\rightarrow 2 \\ \frac{7!}{2!.2!.2!} &= 630 \end{aligned}$$

SORU:

“1114164” sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek birbirinden farklı yedi basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 4 \\ 4 &\rightarrow 2 \\ \frac{7!}{4!.2!} &= \frac{7.6.5.4!}{2.4!} = 105 \end{aligned}$$

SORU:

“KELEBEK” kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek yedi harfli ve E harfi ile başlayan anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

$$\begin{aligned} K &\rightarrow 2 \\ E &\rightarrow 2 \\ \frac{6!}{2!.2!} &= 180 \end{aligned}$$

Örnek

33300551 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek sekiz basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

**Çözüm**

Verilen rakamlar kullanılarak sekiz basamaklı sayılar yazabilmemiz için sıfır başa gelmemelidir.

$$\begin{aligned} \frac{8!}{3!.2!.2!} - \frac{7!}{3!.2!} &= \frac{8.7.6.5.4.3.2}{3.2.2.2} - \frac{7.6.5.4.3.2}{3.2.2} \\ &= 1680 - 420 \\ &= 1260 \text{ olur.} \end{aligned}$$

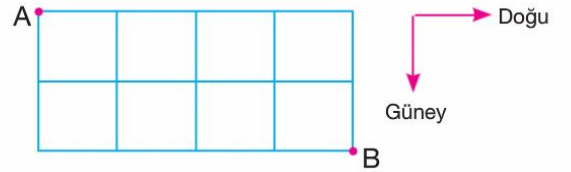
1.yol *2.yol* *(Bazı rakamlar başa gelmez)* *(Bazı rakamlar başa gelebilir)*

SORU:

23023 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek beş basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

$$\begin{aligned} \frac{5!}{2!.2!} - \frac{4!}{2!.2!} &= 30 - 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

1.yol *2.yol* *(Bazı rakamlar başa gelmez)* *(Bazı rakamlar başa gelebilir)*

Örnek - 1

Yukarıdaki şekilde birbirini dik kesen sokaklar gösterilmiştir.

A dan hareket edip B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kişi kaç farklı yol izleyebilir?



Çözüm

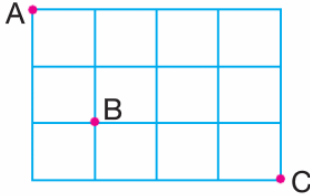
A dan B ye en kısa yoldan gidecek bir kişi 2 sokak güneye (G) ve 4 sokak doğuya (D) gitmelidir.

GGDDDD, GDDDDG, ... , GDGDDD

gibi durumlar vardır. Buna göre,

$$\frac{6!}{2!.4!} = 15 \text{ farklı yolla gidebilir.}$$

Örnek-2



Yandaki şekilde birbirini dik kesen sokaklar gösterilmiştir.

A dan hareket edip B ye uğrayarak C noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kişi kaç farklı yol izleyebilir?



Çözüm

A dan C ye en kısa yoldan gitmek isteyen bir kişi önce A dan B ye en kısa yoldan, daha sonra B den C ye en kısa yoldan gitmelidir.

A dan B ye en kısa yoldan gidecek olan bir kişi; 1 sokak doğuya (D) 2 sokak güneye (G) gitmelidir.

Buna göre, A dan B ye

$$\frac{3!}{1!.2!} = 3 \text{ farklı yolla gidebilir.} \quad \dots \text{ (I)}$$

B den C ye en kısa yoldan gidecek olan bir kişi; 3 sokak doğuya (D) ve 1 sokak güneye (G) gitmelidir.

Buna göre, B den C ye

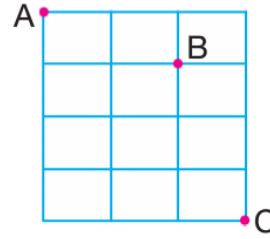
$$\frac{4!}{3!.1!} = 4 \text{ farklı yolla gidilebilir.} \quad \dots \text{ (II)}$$

Çarpma yoluyla sayma kuralına göre, A dan hareket edip B ye uğrayarak C noktasına gidecek olan bir kişi;

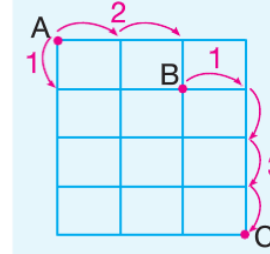
$$\text{(I)} \cdot \text{(II)}$$

$$\frac{3!}{1!.2!} \cdot \frac{4!}{3!.1!} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ farklı yol izleyebilir.}$$

SORU:



Yandaki şekilde A dan C ye, B noktasına uğramak koşulu ile en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?



$$2 + 1 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

$$\frac{3!}{2!.1!} = 3$$

$$\frac{4!}{3!.1!} = 4$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 4 = 12$$

Örnek: 22005 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek kaç tane beş basamaklı sayı yazılabilir?

Çözüm

$$\frac{5!}{2!.2!.1!} = 30$$

1.yol Tüm beş bas - Beş bas. tek

Beş bas. tek sayılar - - - - [5]
0, 0, 2, 2

$$\frac{5!}{2!.2!.1!} \cdot \frac{2}{4} \text{ (2 rak. başa gelebilir)}$$

$$30 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

$$30 - 15 = 15$$

$$2.yol - - - - [0] \rightarrow \frac{4!}{2!.1!.1!.1!} \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$$

$$- - - - [2] \rightarrow \frac{4!}{2!.1!.1!.1!} \cdot \frac{2}{4} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$9 + 6 = 15 \quad \text{(ASANCI)}$$